Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums

Kessel, Siegfried

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 16, 1964, S.1-22

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen *Cosserat*-Kontinuums

Von **Siegfried Kessel**

Vorgelegt von **H. Schaefer**

(Eingegangen am 12. 5. 1964)

Übersicht: Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen wird das allgemeine lineare Stoffgesetz für das *Cosserat*-Kontinuum angegeben. Die Zahl der Stoffkonstanten liegt zwischen 171 beim vollständig anisotropen und 6 bei einem elastisch isotropen, zentrosymmetrischen Material. Die Struktur der Elastizitätstensoren wird für einige Fälle elastischer Symmetrie berechnet.

Summary: Using the principle of virtual displacements, the linear constitutive equations for an elastic Cosserat-continuum are derived. The number of elastic constants is found to be in the range between 171 in the total anisotropic case and 6 for an elastic isotropic centrosymmetrical material. For some cases of elastic symmetrie the structures of the tensors of elastic constants are calculated.

1. Einleitung

Das Kontinuumsmodell, das der klassischen Elastizitätstheorie zugrunde liegt — es ordnet den Punkten des Kontinuums ein Feld von Verschiebungsvektoren zu — ist nicht das allein denkbare. Eine Verallgemeinerung entwickelten in [1] *E.* und *F. Cosserat*, indem sie jedem Punkte ein starres Dreibein zuordneten und sowohl die Verschiebungen der Punkte als auch die Drehungen der Dreibeine als Freiheitsgrade des Kontinuums betrachteten. In diesem allgemeinen Modell, das den materiellen Punkten die kinematischen Eigenschaften von starren Körpern aufprägt, ist das der klassischen Elastizitätstheorie als Spezialfall enthalten; die Erweiterung des kinematischen Modells führt jedoch zur Definition von Deformationen, die die klassische Elastizitätstheorie nicht kennt. In einem *Cosserat*schen Material sind die Deformationen die physikalische Ursache für Spannungen, die sich durch einen nichtsymmetrischen Spannungstensor und einen ebenfalls nichtsymmetrischen Momentenspannungstensor beschreiben lassen. Die Zuordnung von Deformationen und Spannungen sowie die Gleichgewichtsbedingungen folgen aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen in Verbindung mit dem *Lagrange*schen Befreiungsprinzip [2]. Weil das *Boltzmann*sche Axiom von der Gleichheit der Schubspannungen nicht mehr gilt, ist die Mechanik in einem *Cosserat*-Kontinuum vom Nicht-*Boltzmann*schen Typ [2]. Die *Cosserat*sche Theorie des orientierten Mediums wurde 1958 von *Ericksen* und *Truesdell* bei der Untersuchung endlicher Verformungen von Balken und Schalen verwendet [3]; den geraden Balken mit Schubverformung, als Beispiel für ein einparametriges *Cosserat*-Kontinuum, diskutiert *Günther* in einer Arbeit [4], die unter Beschränkung auf infinitesimale Deformationen der *Cosserat*schen Theorie eine moderne Darstellung im Tensorkalkül gibt.

Das dort aufgestellte vollständige System der kinematischen und statischen Gleichungen soll in der vorliegenden Arbeit durch die Einführung von physikalisch möglichen Stoffgesetzen in anisotropen und isotropen, elastischen Medien zu einer Elastizitätstheorie des *Cosserat*-Kontinuums ergänzt werden. Eine Elastizitätstheorie des zweidimensionalen, ebenen *Cosserat*-Kontinuums wurde von *H. Schaefer* in [5] entwickelt. An einfachen Beispielen wird dort gezeigt, in welcher Weise die Ergebnisse der klassischen Elastizitätstheorie durch die allgemeinere Theorie abgeändert werden: Unter gewissen Voraussetzungen beschränkt sich der Einfluß im wesentlichen auf das Randgebiet eines Körpers, und die Dicke dieser „Grenzschicht" wird durch eine der Elastizitätskonstanten bestimmt.

Eine Erweiterung der klassischen Elastizitätstheorie, welche zwar die Statik des *Cosserat*-Kontinuums benutzt, also unsymmetrische Kraftspannungs- und Momentenspannungstensoren und die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen, in der Kinematik aber die Drehfreiheitsgrade des Kontinuums nicht berücksichtigt, wurde von *Toupin* [6], *Mindlin* und *Tiersten* [7], *Koiter* [8] und anderen Autoren [9], [10] behandelt; die Drehungen der materiellen „Punkte" des Kontinuums sind in dieser Theorie durch die Rotation des Verschiebungsfeldes gegeben; als neu hinzukommende Deformationsvariablen dienen die zweiten Gradienten des Verschiebungsfeldes. Das Stoffgesetz eines isotropen Mediums kommt in diesem Fall mit 4 elastischen Konstanten aus; in den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ist es als Spezialfall enthalten. Von einigen der genannten Autoren ist mit dieser eingeschränkten *Cosserat*schen Theorie u. a. das Problem der starken Spannungsgefälle in elastischen Körpern und die Ausbreitung von elastischen Wellen behandelt worden.

2. Absolute und relative Tensoren

Das Kontinuum sei in einen euklidischen Raum eingebettet. Der Orientierung dient ein raumfestes x^1, x^2, x^3-Koordinatensystem mit den kovarianten Maßvektoren $\mathfrak{g}_i$ und dem kovarianten Maßtensor $g_{ik} = \mathfrak{g}_i \cdot \mathfrak{g}_k$. Den kontravarianten Maßtensor g^{ik} erhalten wir aus seiner Definitionsgleichung:

$$g^{ik}\, g_{kl} = \delta^i_l \text{ (Summenkonvention)} .$$

Ein relativer Tensor $(p + q)$-ter Stufe vom Gewicht (n), mit p kontravarianten und q kovarianten Indizes, transformiert sich bei einer Koordinatentransformation $x^{\underline{i}} = x^{\underline{i}}\,(x^1, x^2, x^3)$ nach dem Gesetz [11]:

$$\overset{(n)}{T}{}^{\underline{i}_1 \ldots \underline{i}_p}{}_{\cdots\cdots \underline{k}_1 \ldots \underline{k}_q} = (J)^n \frac{\partial x^{\underline{i}_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{\underline{i}_p}}{\partial x^{l_p}} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x^{\underline{k}_1}} \cdots \frac{\partial x^{m_q}}{\partial x^{\underline{k}_q}} \overset{(n)}{T}{}^{l_1 \ldots l_p}{}_{\cdots\cdots m_1 \ldots m_q} . \tag{1}$$

Dabei ist .

$$J = \det \left(\frac{\partial x^{\underline{i}}}{\partial x^{\underline{k}}} \right) \tag{2}$$

die *Jacobi*sche Determinante der Koordinatentransformation. Für absolute Tensoren ist $n = 0$. Mit Hilfe der Maßtensoren g_{ik} und g^{ik} können Tensorindizes gesenkt und gehoben werden, ohne daß sich dabei das Gewicht (n) der Tensoren ändert.

Mit Hilfe des Permutationssymbols:

$$\epsilon_{ikl} = \begin{cases} +1 \text{ für } ikl = 123,\ 231,\ 312; \\ -1 \text{ für } ikl = 132,\ 213,\ 321; \\ 0 \text{ für alle übrigen Kombinationen,} \end{cases} \tag{3}$$

läßt sich (2) schreiben:

$$J = \epsilon_{ikl} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\underline{1}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\underline{2}}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{\underline{3}}} \tag{4}$$

oder auch:

$$\epsilon_{\underline{ikl}}\, J = \epsilon_{ikl} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\underline{i}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\underline{k}}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{\underline{l}}} . \tag{5}$$

Wir dividieren diese Gleichung durch J und erhalten

$$\epsilon_{\underline{ikl}} = J^{-1} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\underline{i}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\underline{k}}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{\underline{l}}}\, \epsilon_{ikl} . \tag{6}$$

Demnach ist ϵ_{ikl} ein relativer kovarianter Tensor 3. Stufe vom Gewicht (-1), und wir schreiben deshalb:

$$\epsilon_{ikl} \equiv \overset{(-1)}{\epsilon}_{ikl} . \tag{7}$$

Mit dem Permutationssymbol ϵ^{ikl}, dessen Komponenten wie in (3) definiert sind, läßt sich eine Gleichung angeben:

$$\epsilon^{\underline{ikl}}\, J^{-1} = \epsilon^{ikl} \frac{\partial x^{\underline{i}}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\underline{k}}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{\underline{l}}}{\partial x^l} , \tag{8}$$

die (5) entspricht. Multiplikation mit J führt zu:

$$\epsilon^{\underline{ikl}} = J \frac{\partial x^{\underline{i}}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\underline{k}}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{\underline{l}}}{\partial x^l}\, \epsilon^{ikl} \tag{9}$$

und zeigt, daß ϵ^{ikl} ein relativer kontravarianter Tensor 3. Stufe vom Gewicht $(+1)$ ist:

$$\epsilon^{ikl} \equiv \overset{(+1)}{\epsilon}{}^{ikl} . \tag{10}$$

Die Determinante $g = \det(g_{ik})$ des kovarianten Maßtensors kann mit Hilfe der relativen ϵ-Tensoren geschrieben werden:

$$g = \frac{1}{3!} \overset{(+1)}{\epsilon}{}^{ikl} \overset{(+1)}{\epsilon}{}^{pqr} g_{ip}\, g_{kq}\, g_{lr} . \tag{11}$$

Somit ist g ein relativer Skalar (Tensor nullter Stufe) vom Gewicht $(+\,2)$, und das Transformationsgesetz lautet:

$$\overset{(+2)}{g}(x^{i}) = J^2 \overset{(+2)}{g}(x^i)\,. \tag{12}$$

Dieses Gesetz läßt sich auch unmittelbar aus dem Transformationsgesetz des Maßtensors

$$g_{\underline{ik}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{\underline{i}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\underline{k}}}\, g_{ik}$$

herleiten. Es ist:

$$\det(g_{\underline{ik}}) = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{\underline{i}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\underline{k}}}\, g_{ik}\right) = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{\underline{i}}}\right) \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{\underline{k}}}\right) \det(g_{ik})\,,$$

d. h.

$$g(x^{\underline{i}}) = J^2 g(x^i)\,.$$

Nach (12) ist $\sqrt{g}$ ein relativer Skalar vom Gewicht $(+\,1)$ und $\frac{1}{\sqrt{g}}$ ein relativer Skalar vom Gewicht $(-\,1)$:

$$\sqrt{g} \equiv \overset{(+1)}{(\sqrt{g})}\,; \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \equiv \overset{(-1)}{\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)}\,. \tag{13}$$

Durch Multiplikation eines Tensors mit Potenzen dieser beiden relativen Skalare, läßt sich das Gewicht eines Tensors ändern. So wird zum Beispiel aus dem Tensor $\in^{ikl}$ durch Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{g}}$ der absolute kontravariante e-Tensor:

$$e^{ikl} = \overset{(-1)}{\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)} \overset{(+1)}{\in^{ikl}}\,; \tag{14}$$

entsprechend erhalten wir den absoluten kovarianten e-Tensor:

$$e_{ikl} = \overset{(+1)}{(\sqrt{g})} \overset{(-1)}{\in_{ikl}}\,. \tag{15}$$

3. Kinematik und Statik des *Cosserat*schen Kontinuums

Der unverformte Ausgangszustand des als homogen vorausgesetzten *Cosserat*schen-Kontinuums sei gekennzeichnet durch die zueinander parallele Lage der mit den Punkten des Kontinuums verbundenen lokalen starren Dreibeine. Verschiebungen und Drehungen sollen sich auf diesen Ausgangszustand beziehen.

Das Verschiebungsvektorfeld $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(x^1, x^2, x^3)$ sei eindeutig, stetig und mindestens zweimal stetig differenzierbar in einem einfach zusammenhängenden Bereich V des Raumes mit stückweise glatter Oberfläche F. Die Verschiebungsgradienten seien so klein, daß wir uns auf eine geometrisch lineare

Theorie beschränken dürfen. Die Darstellung des Verschiebungsvektorfeldes im raumfesten Bezugssystem lautet:

$$\mathfrak{u} = u^i \, \mathfrak{g}_i \,. \tag{16}$$

Die kontravariante Maßzahl u^i kann mit Hilfe des kovarianten Maßtensors in die kovariante Maßzahl umgerechnet werden:

$$u_i = g_{ik} \, u^k \,. \tag{17}$$

Die als infinitesimal vorausgesetzten Drehungen der lokalen Dreibeine lassen sich durch ein Feld absoluter, antisymmetrischer Tensoren 2. Stufe beschreiben:

$$\Omega_{ik} = \Omega_{[ik]} \equiv \frac{1}{2} \left(\Omega_{ik} - \Omega_{ki} \right) . \tag{18}$$

Diesem Tensorfeld ist ein Feld relativer „Drehvektoren“ vom Gewicht $(+1)$ („axialer Vektoren“) zugeordnet:

$$\overset{(+1)}{\Phi^i} = \frac{1}{2} \overset{(+1)}{\in^{ikl}} \, \Omega_{kl} \,, \tag{19}$$

für die etwa bei der Transformation $x^{\underline{i}} = - x^i$ mit $J = -1$, das Transformationsgesetz:

$$\overset{(+1)}{\Phi^{\underline{i}}} = (-1) \left(- \delta^{\underline{i}}_{k} \right) \overset{(+1)}{\Phi^k} = + \overset{(+1)}{\Phi^i}$$

gilt, während sich in diesem Fall ein absoluter („polarer“) Vektor gemäß

$$v^{\underline{i}} = \left(- \delta^{\underline{i}}_{k} \right) v^k = - v^i$$

transformiert.

Der Unterschied zwischen axialen (relativen) Vektoren und polaren (absoluten) Vektoren entfällt bei Beschränkung auf Koordinatentransformationen mit $J = + 1$.

Das Drehvektorfeld $\overset{(+1)}{\Phi^i} = \overset{(+1)}{\Phi^i} (x^1, x^2, x^3)$ sei ebenfalls in einem abgeschlossenen Bereich des Raumes eindeutig, stetig und mindestens zweimal stetig differenzierbar.

Den Deformationszustand des *Cosserat*schen Kontinuums beschreiben wir durch insgesamt 18 Größen [4]:

6 Verschiebungsdeformationen:

$$\varepsilon_{(ik)} = \nabla_{(i} \, u_{k)} \equiv \frac{1}{2} \left(\nabla_i \, u_k + \nabla_k \, u_i \right) , \tag{20}$$

die wie in der klassischen linearen Elastizitätstheorie definiert sind;

3 Verdrehungsdeformationen:

$$\overset{(+1)}{\varphi^i} = \overset{(+1)}{\Phi^i} - \frac{1}{2} \overset{(+1)}{\in^{ikl}} \, \nabla_k \, u_l \,, \tag{21}$$

welche die Relativdrehung der lokalen, starren Dreibeine gegenüber der „mittleren Drehung“ $\frac{1}{2}\overset{(+1)}{\epsilon^{ikl}}\nabla_k u_l$ angeben, die im Verschiebungsfeld enthalten ist, und

9 Krümmungsdeformationen:

$$\overset{(+1)}{\varkappa_{i\cdot}^{\ k}} = \nabla_i \overset{(+1)}{\Phi^k_{\cdot}} \,. \tag{22}$$

∇_i bedeutet die kovariante Ableitung in bezug auf die durch die g_{ik} gegebene Maßbestimmung; es ist also:

$$\nabla_i u_k = \partial_i u_k - \Gamma_{ik}{}^l u_l \,,$$

$$\Gamma_{ik}{}^l = \frac{1}{2} g^{lm} (\partial_i g_{mk} + \partial_k g_{mi} - \partial_m g_{ik}) \,.$$

Da die g_{ik} und auch $\sqrt{g}$ kovariant konstant sind, wird das Gewicht eines Tensors durch die kovariante Differentiation nicht geändert.

In kartesischen Koordinaten entfällt der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Indizes, und es wird:

$$\varepsilon_{(ik)} = \partial_{(i} u_{k)} \,, \tag{20'}$$

$$\overset{(+1)}{\varphi_i} = \overset{(+1)}{\Phi_i} - \frac{1}{2}\overset{(+1)}{\epsilon_{ikl}} \partial_k u_l \,, \tag{21'}$$

$$\overset{(+1)}{\varkappa_{ik}} = \partial_i \overset{(+1)}{\Phi_k} \,. \tag{22'}$$

Einer starren Bewegung des Kontinuums entsprechen die Vektorfelder:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \mathfrak{u}_0 + \vec{\Phi}_0 \times \mathfrak{r} \,, \\ \vec{\Phi} &= \vec{\Phi}_0 \,, \end{aligned} \tag{23}$$

mit konstanten Vektoren $\mathfrak{u}_0$ und $\vec{\Phi}_0$. In kartesischen Koordinaten lautet (23):

$$\begin{aligned} u_i &= u_{0i} + \overset{(-1)}{\epsilon_{ikl}} \overset{(+1)}{\Phi_{0k}} x_l \,, \\ \overset{(+1)}{\Phi_i} &= \overset{(+1)}{\Phi_{0i}} ; \end{aligned} \tag{24}$$

x_e sind die kartesischen Komponenten des Ortsvektors $\mathfrak{r}$.

Es ist:

$$\partial_i u_k = \overset{(-1)}{\epsilon_{klm}} \overset{(+1)}{\Phi_{0l}} \partial_{im} = \overset{(-1)}{\epsilon_{ikl}} \overset{(+1)}{\Phi_{0l}} \,.$$

Daraus folgt:

$$\varepsilon_{(ik)} = \frac{1}{2} (\partial_i u_k + \partial_k u_i) = 0 \,.$$

Da $\overset{(+1)}{\Phi_i} = \overset{(+1)}{\Phi_{0i}} =$ konstant ist, wird auch:

$$\overset{(+1)}{\varkappa_{ik}} = 0 .$$

Für $\overset{(+1)}{\varphi_i}$ erhalten wir:

$$\overset{(+1)}{\varphi_i} = \overset{(+1)}{\Phi_{0i}} - \frac{1}{2} \overset{(+1)}{\in_{ikl}} \overset{(-1)}{\in_{klm}} \overset{(+1)}{\Phi_{0m}} ,$$

$$\overset{(+1)}{\varphi_i} = \overset{(+1)}{\Phi_{0i}} - \frac{1}{2} \cdot 2 \, \delta_{im} \overset{(+1)}{\Phi_{0m}} = 0 .$$

Für eine starre Bewegung (23) ist somit

$$\varepsilon_{(ik)} = 0 , \ \overset{(+1)}{\varphi^i} = 0 , \ \overset{(+1)}{\varkappa_i^k} = 0 . \tag{25}$$

Den kinematischen Größen $\varepsilon_{(ik)}$, $\overset{(+1)}{\varphi^i}$ und $\overset{(+1)}{\varkappa_i^k}$ lassen sich nun über das Prinzip der virtuellen Verrückungen und das *Lagrange*sche Befreiungsprinzip [2] statische Größen zuordnen: Kraftspannungen und Momentenspannungen. Ein Körper vom Volumen V sei im Inneren belastet durch Volumenkräfte X^i und Volumenmomente $\overset{(-1)}{Y_i}$, auf der Oberfläche F durch Kraftspannungen p^i und Momentenspannungen $\overset{(-1)}{q_i}$. Diese Belastung hält sich am *starren* Körper, das Gleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit aller Kräfte und Momente verschwindet:

$$\delta A = \iiint\limits_{(V)} \left[X^i \delta u_i + \overset{(-1)}{Y_i} \, \delta \overset{(+1)}{\Phi^i} \right] d V + \iint\limits_{(F)} \left[p^i \delta u_i + \overset{(-1)}{q_i} \, \delta \overset{(+1)}{\Phi^i} \right] d F = 0 . \tag{26}$$

$d V$ ist definiert als absolutes Volumenelement [11]:

$$d V = \overset{(+1)}{(\sqrt{g})} \, \overset{(-1)}{d \tau} . \tag{27}$$

In kartesischen Koordinaten ist $d\tau = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$; in einem $x^{\underline{i}}$-System wird:

$$d\tau \, (x^{\underline{i}}) = J^{-1} \, d\tau \, (x^i) . \tag{28}$$

Also ist $d\tau$ ein relativer Skalar vom Gewicht (-1) und $d V$ ein absoluter Skalar. Ebenso ist dF ein absolutes Flächenelement, und da die Integranden absolute Skalare sind, ist auch δA ein absoluter Skalar.

Die in (26) verwendeten virtuellen Verschiebungsvektorfelder δu_i und virtuellen Drehvektorfelder $\delta \overset{(+1)}{\Phi^i}$ sind nicht beliebig. Sie müssen den Nebenbedingungen:

$$\delta\,\varepsilon_{(ik)} = \nabla_{(i}\,[\delta u_{k)}] = 0\,,$$

$$\delta \overset{(+1)}{\varphi^i} = \delta \overset{(+1)}{\Phi^i} - \frac{1}{2} \overset{(+1)}{\in^{ikl}} \nabla_k\,[\delta u_l] = 0\,, \tag{29}$$

$$\delta \overset{(+1)}{\varkappa_{i\cdot}^{\;k}} = \nabla_i \left[\delta \overset{(+1)}{\Phi^k}\right] = 0\,,$$

den Starrheitsbedingungen, genügen. Wir multiplizieren diese Nebenbedingungen mit *Lagrange*schen Faktoren: $(29)_1$ mit $\sigma^{(ik)}$, $(29)_2$ mit $2\overset{(-1)}{\sigma_i}$, $(29)_3$ mit $\overset{(-1)}{\mu^i_{\cdot k}}$ und nehmen sie in die Variationsformel (26) auf. Die virtuellen Lageänderungen werden dadurch freie Variationen des Verschiebungs- und des Drehfeldes. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{(V)} \Big\{ X^i\,\delta u_i + \overset{(-1)}{Y_i}\,\delta \overset{(+1)}{\Phi^i} - \sigma^{ik}\,\nabla_{(i}\,[\delta u_{k)}] - \\ - 2\overset{(-1)}{\sigma_i}\left(\delta \overset{(-1)}{\Phi^i} - \frac{1}{2}\overset{(-1)}{\in^{ikl}}\,\nabla_k\,[\delta u_l]\right) - \overset{(-1)}{\mu^i_{\cdot k}}\,\nabla_i\left[\delta \overset{(-1)}{\Phi^k}\right]\Big\}\,dV + \\ + \iint\limits_{(F)} \left(p^i\,\delta u_i + \overset{(-1)}{q_i}\,\delta \overset{(-1)}{\Phi^i}\right) dF = 0.\end{aligned} \tag{30}$$

Wir führen noch den absoluten antisymmetrischen Tensor

$$\sigma^{[ik]} \equiv \frac{1}{2}\left(\sigma^{ik} - \sigma^{ki}\right) = -\overset{(+1)}{\in^{ikl}}\,\overset{(-1)}{\sigma_l} \tag{31}$$

ein und erhalten nach partieller Integration:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{(V)} [X^k + \nabla_i\,\sigma^{(ik)} + \nabla_i\,\sigma^{[ik]}]\,\delta u_k\,dV + \\ + \iiint\limits_{(V)} \left[\overset{(-1)}{Y_k} - 2\overset{(-1)}{\sigma_k} + \nabla_i\,\overset{(-1)}{\mu^i_{\cdot k}}\right] \delta \overset{(+1)}{\Phi^k}\,dV + \\ + \iint\limits_{(F)} [p^k - n_i\,(\sigma^{(ik)} + \sigma^{[ik]})]\,\delta u_k\,dF + \\ + \iint\limits_{(F)} \left[\overset{(-1)}{q_k} - n_i\,\overset{(-1)}{\mu^i_{\cdot k}}\right] \delta \overset{(-1)}{\Phi^k}\,dF = 0;\end{aligned} \tag{32}$$

n_i ist die kovariante Maßzahl des äußeren Normaleneinheitsvektors $\mathfrak{n}$ eines Flächenelementes dF der Oberfläche F. (32) liefert die Feldgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\nabla_i\,\sigma^{ik} &= -X^k\,,\\ \nabla_i\,\overset{(-1)}{\mu^i_{\cdot k}} - 2\overset{(-1)}{\sigma_k} &= -\overset{(-1)}{Y_k}\,,\end{aligned}\right\} \quad \text{in } V; \tag{33}$$

und die Randformeln:

$$n_i \sigma^{ik} = p^k , \qquad \text{auf } F; \qquad n_i \overset{(-1)}{\mu^i_{.\,k}} = \overset{(-1)}{q_k} , \tag{34}$$

dabei ist: $\sigma^{ik} = \sigma^{(ik)} + \sigma^{[ik]}$.

Die *Lagrange*schen Faktoren $\sigma^{(ik)}$, $\overset{(-1)}{\sigma_i}$ und $\overset{(-1)}{\mu^i_{.\,k}}$ lassen sich deuten als Reaktionen auf die geometrischen Starrheitsbedingungen: $\varepsilon_{(ik)} = 0$, $\overset{(+1)}{\varphi^i_{.}} = 0$, $\overset{(-1)}{\varkappa_{i.}^{\;k}} = 0$.

Nach dem *Lagrange*schen Befreiungsprinzip werden die Reaktionen zu eingeprägten inneren Kraftgrößen, wenn die Starrheitsbedingungen aufgegeben, also Deformationen des Kontinuums zugelassen werden.

Die physikalische Bedeutung der σ^{ik} und $\overset{(-1)}{\mu^i_{.\,k}}$ folgt aus den Randformeln (34): σ^{ik} ist der im Gegensatz zur klassischen Elastizitätstheorie nicht mehr symmetrische Tensor der Kraftspannungen und $\overset{(-1)}{\mu^i_{.\,k}}$ der Tensor der Momentenspannungen. Sie genügen den Gleichgewichtsbedingungen im *Cosserat*-Kontinuum (33), die ebenso wie die Spannungen durch die Kinematik festgelegt sind.

Um zu dem Stoffgesetz zu gelangen, das die 18 Deformationen mit den 18 Spannungen verknüpft, lassen wir uns vom Prinzip der virtuellen Verrückungen leiten.

4. Das lineare Stoffgesetz des *Cosserat*-Kontinuums

Ein Körper aus elastischem *Cosserat*schem Material sei unter der Einwirkung eines Gleichgewichtssystems äußerer Kräfte und Momente infinitesimal verformt. Bei einer virtuellen Lageänderung leisten die äußeren Kräfte und Momente die virtuelle Arbeit:

$$\delta A_a = \iiint_{(V)} [X^k \, \delta u_k + \overset{(-1)}{Y_k} \, \delta \overset{(+1)}{\Phi^k}] \, dV + \iint_{(F)} [p^k \, \delta u_k + \overset{(-1)}{q_k} \, \delta \overset{(+1)}{\Phi^k}] \, dF . \tag{35}$$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen (33) können wir die Volumenkräfte und Volumenmomente eliminieren und erhalten nach der üblichen Umformung:

$$\delta A_a = \iiint_{(V)} [\sigma^{(ik)} \, \delta \varepsilon_{(ik)} + \overset{(-1)}{\mu_{(ik)}} \, \delta \overset{(+1)}{\varkappa^{(ik)}} + 2 \overset{(-1)}{\sigma_i} \, \delta \overset{(+1)}{\varphi^i} + 2 \mu^i \, \delta \varkappa_i] \, dV , \tag{36}$$

wobei wir die Randformeln (34) benutzt haben.

In (36) wurden eingeführt:

$$\overset{(-1)}{\mu^i_{.\,k}} \, \delta \overset{(+1)}{\varkappa_{i.}^{\;k}} = \overset{(-1)}{\mu_{ik}} \, \delta \overset{(+1)}{\varkappa^{ik}} = \overset{(-1)}{\mu_{(ik)}} \, \delta \overset{(+1)}{\varkappa^{(ik)}} + \overset{(-1)}{\mu_{[ik]}} \, \delta \overset{(+1)}{\varkappa^{[ik]}} \tag{37}$$

und

$$\mu^i = \frac{1}{2} \overset{(+1)}{\in}{}^{ikl} \overset{(-1)}{\mu}_{[kl]} \quad ; \quad \delta \varkappa_i = \frac{1}{2} \overset{(-1)}{\in}_{ikl} \, \delta \overset{(+1)}{\varkappa}{}^{[kl]} \,. \tag{38}$$

Bei einer adiabatischen Zustandsänderung ist nach dem 1. Haupsatz der Thermodynamik die Änderung der inneren Energie U eines physikalischen Systems gleich der an dem System von außen geleisteten Arbeit:

$$\delta U = \delta A_a \,. \tag{39}$$

Ist $\mathfrak{U}$ die innere Energie pro Volumeneinheit, so folgt aus (36):

$$\delta \mathfrak{U} = \sigma^{(ik)} \, \delta \varepsilon_{(ik)} + \overset{(-1)}{\mu}_{(ik)} \, \delta \overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(ik)} + 2 \overset{(-1)}{\sigma}_i \, \delta \overset{(+1)}{\varphi}{}^i + 2 \mu^i \, \delta \varkappa_i \,. \tag{40}$$

Der absolute Skalar $\mathfrak{U}$ ist eine Funktion aller Deformationsvariablen:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U} \, (\varepsilon_{(ik)} \,, \overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(ik)}, \overset{(+1)}{\varphi}{}^i \,, \varkappa_i) \,, \tag{41}$$

und damit nach (40):

$$\begin{aligned} \sigma^{(ik)} &= \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \varepsilon_{(ik)}} \,, \quad \overset{(-1)}{\mu}_{(ik)} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(ik)}} \,, \\ 2 \overset{(-1)}{\sigma}_i &= \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \overset{(+1)}{\varphi}{}^i} \,, \quad 2 \mu^i = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \varkappa_i} \,. \end{aligned} \tag{42}$$

Bei einer isothermen Zustandsänderung ist $\mathfrak{U}$ durch $\mathfrak{F}$, die freie Energie pro Volumeneinheit, zu ersetzen.

Für ein lineares Stoffgesetz ist $\mathfrak{U}$ eine homogene Funktion 2. Grades in den 18 Deformationsvariablen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} = {} & \underset{1}{E}{}^{(ik)\,(lm)} \, \varepsilon_{(ik)} \, \varepsilon_{(lm)} + \underset{2}{\overset{(-2)}{E}}{}_{(ik)\,(lm)} \, \overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(ik)} \, \overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(lm)} + \\ & + \underset{3}{\overset{(-1)}{E}}{}^{(ik)}{}_{(lm)} \, \varepsilon_{(ik)} \, \overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(lm)} + \underset{4}{\overset{(-1)}{E}}{}^{(ik)}{}_l \, \varepsilon_{(ik)} \, \overset{(+1)}{\varphi}{}^l + \\ & + \underset{5}{\overset{(-2)}{E}}{}_{(ik)l} \, \overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(ik)} \, \overset{(+1)}{\varphi}{}^l + \underset{6}{E}{}^{(ik)l} \, \varepsilon_{(ik)} \, \varkappa_l + \\ & + \underset{7}{\overset{(-1)}{E}}{}_{(ik)}{}^l \, \overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(ik)} \, \varkappa_l + \underset{8}{\overset{(-2)}{E}}{}_{(ik)} \, \overset{(+1)}{\varphi}{}^i \, \overset{(+1)}{\varphi}{}^k + \\ & + \underset{9}{E}{}^{(ik)} \, \varkappa_i \, \varkappa_k + \underset{10}{\overset{(-1)}{E}}{}_i{}^{.k} \, \overset{(+1)}{\varphi}{}^i \, \varkappa_k \,. \end{aligned} \tag{43}$$

Die 10 Elastizitätstensoren enthalten insgesamt maximal (21 + 21 + 36 + 18 + 18 + 18 + 18 + 6 + 6 + 9) = 171 Materialkonstanten. Wie in der klassischen Elastizitätstheorie — ihr entspricht das erste Glied in (43) — vermindert sich diese Zahl, wenn das Material nicht vollständig anisotrop ist.

Bei der Untersuchung des Einflusses von Materialsymmetrien auf die Elastizitätstensoren beschränken wir uns auf ihre Darstellung in kartesischen Koordinaten. Ist das Material invariant gegenüber einer Symmetrietransformation $x^i \to x^{\underline{i}}$, dann müssen die Elastizitätstensoren bei dieser Transformation in sich übergehen:

$$\overset{(n)}{E}_{\underline{ik}\,\ldots} = (J)^n \frac{\partial x^{\underline{i}}}{\partial x^l} \frac{\partial x^{\underline{k}}}{\partial x^m} \cdots \overset{(n)}{E}_{lm\,\ldots} = \overset{(n)}{E}_{ik\,\ldots}\,. \tag{44}$$

Bei allen Symmetrietransformationen ist $J = \pm 1$, denn es handelt sich entweder um Drehungen ($J = +1$) oder um Drehspiegelungen ($J = -1$).

Die den Elastizitätstensoren auferlegte Bedingung (44) schränkt die Zahl der voneinander unabhängigen Materialkonstanten z. T. erheblich ein. So ergibt sich bei Spiegelsymmetrie bzgl. der x^1, x^2-Ebene, also Invarianz gegenüber der Transformation:

$$x^{\underline{1}} = x^1\,,\ x^{\underline{2}} = x^2\,,\ x^{\underline{3}} = -x^3\,, \tag{45}$$

ein Stoffgesetz mit 90 Konstanten. Es ist nämlich für diese Transformation

$$\frac{\partial x^{\underline{1}}}{\partial x^1} = 1\,,\quad \frac{\partial x^{\underline{2}}}{\partial x^2} = 1\,,\quad \frac{\partial x^{\underline{3}}}{\partial x^3} = -1\,,\quad \frac{\partial x^{\underline{i}}}{\partial x^k} = 0;\ i \neq k \tag{46}$$

und $J = -1$.

Für den Tensor $\underset{1}{E}$ folgt z. B. aus (44) in Verbindung mit (46):

$$\underset{1}{E}_{(\underline{ik})(\underline{lm})} = (-1)^s\, \underset{1}{E}_{(ik)(lm)}\,,$$

wobei s angibt, wie oft der Index „3" in $(ik)\,(lm)$ vorkommt. Da aber für alle Indizes gelten muß:

$$\underset{1}{E}_{(\underline{ik})(\underline{lm})} = \underset{1}{E}_{(ik)(lm)}\,,$$

sind alle Tensorkomponenten Null, die den Index „3" einmal oder dreimal enthalten; die Zahl der voneinander unabhängigen Tensorkomponenten ist nicht mehr 21, sondern nur noch 13.

Für den Tensor $\underset{2}{E}$ erhalten wir dasselbe Ergebnis.

Beim Tensor $\underset{3}{E}$ wird:

$$\underset{3}{\overset{(-1)}{E}}_{(\underline{ik})(\underline{lm})} = (-1)^{s+1}\, \underset{3}{\overset{(-1)}{E}}_{(ik)(lm)}$$

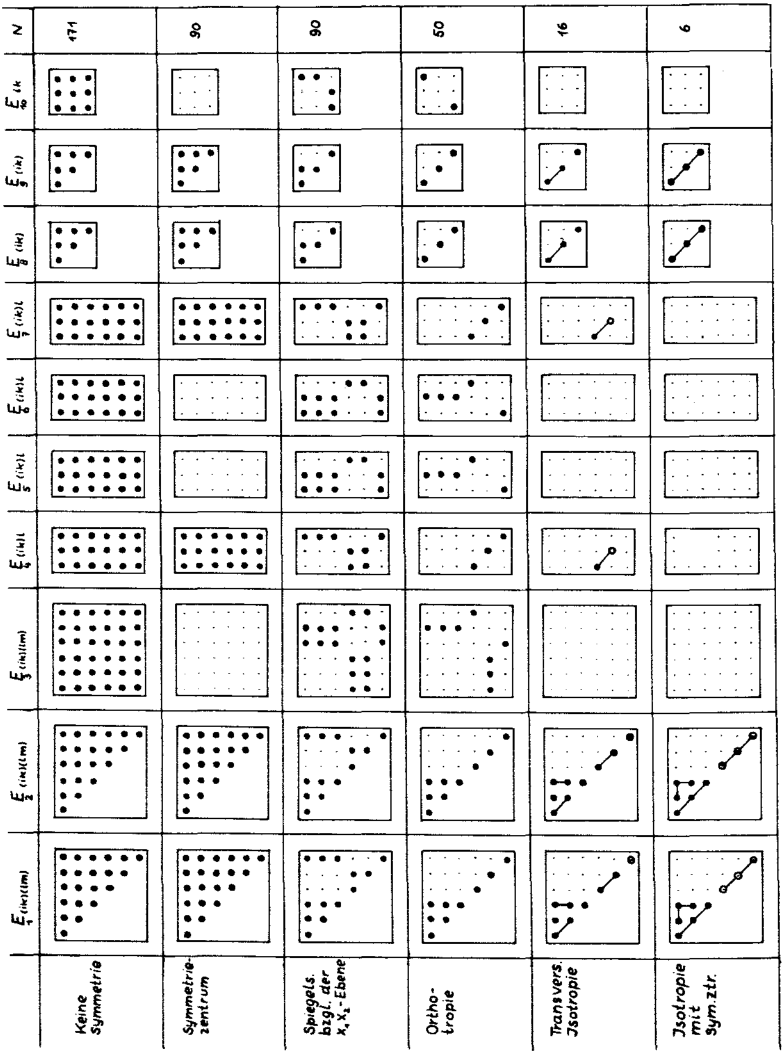
Demnach sind alle Tensorkomponenten Null, die den Index „3" viermal, zweimal oder gar nicht enthalten: es bleiben 16 Tensorkomponenten übrig, d. h. 16 Materialkonstanten.

In der Tabelle 1, Zeile 3 sind die Ergebnisse für alle Tensoren $\underset{1}{E}, \ldots \underset{10}{E}$ zusammengestellt.

Bei Orthotropie [14], also Invarianz gegenüber den Transformationen:

$$x^{\underline{1}} = x^1,\ x^{\underline{2}} = x^2,\ x^{\underline{3}} = -x^3,$$
$$x^{\underline{1}} = -x^1,\ x^{\underline{2}} = x^2,\ x^{\underline{3}} = x^3,$$

Tabelle 1



enthält das Stoffgesetz 50 Konstanten; bei transversaler Isotropie, d. h. bei Invarianz gegenüber den Transformationen:

$$
\begin{aligned}
&x^{\underline{1}} = x^1, \quad x^{\underline{2}} = x^2,\ x^{\underline{3}} = -x^3 \\
&x^{\underline{1}} = -x^1,\ x^{\underline{2}} = x^2,\ x^{\underline{3}} = x^3 \\
&x^{\underline{1}} = \quad \cos\alpha\, x^1 + \sin\alpha\, x^2, \\
&x^{\underline{2}} = -\sin\alpha\, x^1 + \cos\alpha\, x^2,\ x^{\underline{3}} = x^3; 0 \le \alpha \le 2\pi
\end{aligned}
\tag{47}
$$

insgesamt nur noch 16 Materialkonstanten.

Wir geben noch ein Beispiel:

Für die Transformation $(47)_1$ wird

$$\frac{\partial x^{\underline{1}}}{\partial x^1} = 1\,,\ \frac{\partial x^{\underline{2}}}{\partial x^2} = 1\,,\ \frac{\partial x^{\underline{3}}}{\partial x^3} = -1\,,\ \frac{\partial x^{\underline{i}}}{\partial x^k} = 0\,,\ \ i \neq k \tag{48}$$

und $J = -1$.

Die Formel (44) auf den Tensor $\underset{4}{E}$ angewendet ergibt:

$$\underset{4}{\overset{(-1)}{E}}_{(\underline{ik})\underline{l}} = (-1)^{s+1}\underset{4}{\overset{(-1)}{E}}_{(ik)l}\,.$$

Demnach sind alle Tensorkomponenten Null, außer denen mit den Indexkombinationen:

$$(11)3,\ (22)3,\ (33)3,\ (12)3,\ (13)1,\ (23)1,\ (13)2 \text{ und } (23)2. \tag{49}$$

(Das ist der Tensor $\underset{4}{E}$ bei Invarianz gegenüber der Transformation (46); Tabelle 1, Zeile 3).

Für die Transformation $(47)_2$ wird:

$$\frac{\partial x^{\underline{1}}}{\partial x^1} = -1\,,\ \frac{\partial x^{\underline{2}}}{\partial x^2} = 1\,,\ \frac{\partial x^{\underline{3}}}{\partial x^3} = 1\,;\ \frac{\partial x^{\underline{i}}}{\partial x^k} = 0\,,\ \ i \neq k \tag{50}$$

mit $J = -1$,

und
$$\underset{4}{\overset{(-1)}{E}}_{(\underline{ik})\underline{l}} = (-1)^{t+1}\underset{4}{\overset{(-1)}{E}}_{(ik)l}\,,$$

wobei t angibt, wie oft der Index „1“ unter den Tensorindizes $(ik)_l$ vorkommt. Es sind also von den Tensorkomponenten (49) alle Null, in denen der Index „1“ zweimal oder gar nicht vorkommt; von Null verschieden sind nur die Tensorkomponenten:

$$\underset{4}{\overset{(-1)}{E}}_{(12)3}\,;\ \underset{4}{\overset{(-1)}{E}}_{(13)2}\,;\ \underset{4}{\overset{(-1)}{E}}_{(23)1}\,. \tag{51}$$

(Das ist der Tensor $\underset{4}{E}$ bei Orthotropie; Tabelle 1, Zeile 4).

Für die Transformation $(47)_3$ wird:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x^{\underline{1}}}{\partial x^1} = \frac{\partial x^{\underline{2}}}{\partial x^2} = \cos\alpha\\
&\frac{\partial x^{\underline{1}}}{\partial x^2} = -\frac{\partial x^{\underline{2}}}{\partial x^1} = \sin\alpha\\
&\frac{\partial x^{\underline{3}}}{\partial x^3} = 1\,,\ \frac{\partial x^{\underline{i}}}{\partial x^3} = \frac{\partial x^{\underline{3}}}{\partial x^i} = 0\,,\ \ i, \underline{i} \neq 3\,.
\end{aligned} \tag{52}$$

mit $J = +1$.

Jetzt braucht die Formel (44) nur noch auf die drei Tensorkomponenten (51) angewendet zu werden, wobei sich ergibt:

$$\begin{aligned}
\overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(\underline{1}\,\underline{2})\underline{3}} &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\, \overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(12)3}\,, \\
\overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(\underline{1}\,\underline{3})\underline{2}} &= \cos^2 \alpha\, \overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(13)2} - \sin^2 \alpha\, \overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(23)1}\,, \\
\overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(\underline{2}\,\underline{3})\underline{1}} &= -\sin^2 \alpha\, \overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(13)2} + \cos^2 \alpha\, \overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(23)1}\,.
\end{aligned} \tag{53}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(12)3} = 0\,,\quad \overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(13)2} = -\overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}_{(23)1}\,; \tag{54}$$

der Tensor $\underset{4}{\boldsymbol{E}}$ enthält also nur noch eine Materialkonstante (Tabelle 1, Zeile 5).

Nehmen wir zu den Symmetrietransformationen (47) noch hinzu beliebige Drehungen um die x_1-Achse und um die x_2-Achse, so erhalten wir den Sonderfall höchster Symmetrie: Isotropie mit Symmetriezentrum. Das Stoffgesetz enthält dann nur noch 6 Materialkonstanten (Tabelle 1, Zeile 6).

Eine zweite Tabelle enthält die 10 Elastizitätstensoren für das tetragonale Kristallsystem mit den 7 Kristallklassen C_4, $C_{4\mathrm{v}}$, $C_{4\mathrm{h}}$, S_4, D_4, $D_{2\mathrm{d}}$ und $D_{4\mathrm{h}}$ [12], [13]. Die Kristallklasse S_4 z. B. erlaubt die Symmetrietransformationen:

$$\begin{aligned}
&S_4\colon\ x^{\underline{1}} = x^2,\ x^{\underline{2}} = -x^1,\ x^{\underline{3}} = -x^3,\ (J = -1);\\
&C_2\colon\ x^{\underline{1}} = x^2,\ x^{\underline{2}} = -x^1,\ x^{\underline{3}} = x^3,\ (J = +1);\\
&S_4\colon\ x^{\underline{1}} = -x^2,\ x^{\underline{2}} = x^1,\ x^{\underline{3}} = -x^3,\ (J = -1).
\end{aligned}$$

In den Tabellen 1 und 2 benutzen wir die von *N y e* in [13] eingeführten Bezeichnungen:

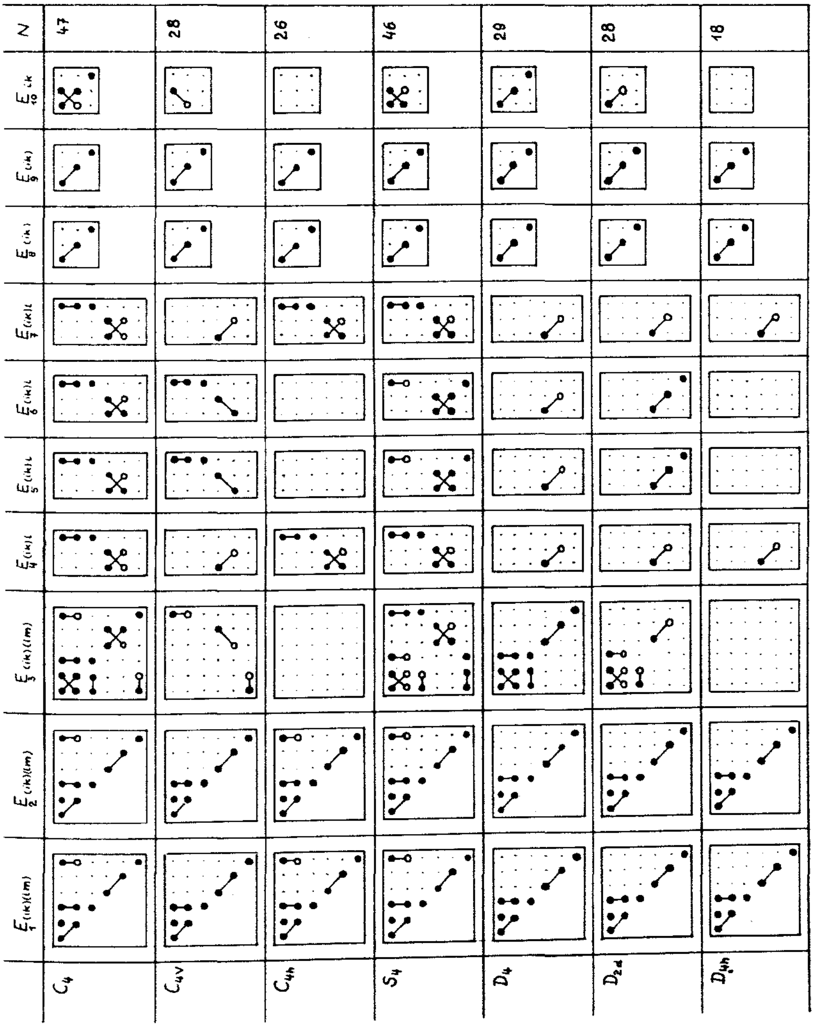
„●"	Die Tensorkomponente ist $\neq 0$,
„."	die Tensorkomponente ist $= 0$,
„●—●"	die beiden Tensorkomponenten sind einander gleich,
„●—○"	die beiden Tensorkomponenten unterscheiden sich durch das Vorzeichen,
„⊙"	die Tensorkomponente ist gleich $1/2\,(E_{11,11} - E_{11,22})$.

Die Anordnung der Tensorkomponenten bei den Tensoren 4. Stufe ist nach dem folgenden Schema vorgenommen worden:

a) 1. Indexpaar b) 2. Indexpaar	11	22	33	23	31	12
a) Zeile b) Spalte	1	2	3	4	5	6

Für die Tensoren 3. Stufe ist nur der Teil a) dieser Tabelle zu benutzen, die Spalten gehören zum 3. Index. Die Tensoren 2. Stufe sind nach dem üblichen Matrizenschema angeordnet.

Tabelle 2



Bei den Darstellungen der Tensoren $\underset{1}{\boldsymbol{E}}$, $\underset{2}{\boldsymbol{E}}$, $\underset{8}{\boldsymbol{E}}$ und $\underset{9}{\boldsymbol{E}}$ ist die Symmetrie zur Hauptdiagonalen zu beachten.

Die speziell in kartesischen Koordinaten berechneten Elastizitätstensoren in den beiden Tabellen lassen sich mit der Transformationsformel (1) in jedes andere Koordinatensystem umrechnen.

Für die weiteren Rechnungen ist eine Unterscheidung zwischen absoluten und relativen Tensoren nicht mehr erforderlich. Wenn wir uns auf Koordinatentransformationen beschränken, deren *Jakobi*sche Determinante positiv ist, unterscheiden sich relative und absolute Tensoren in verschiedenen Koordinatensystemen nur durch einen unwesentlichen Faktor $\sqrt{g}^m$. Alle Gleichungen bleiben gültig, wenn wir durch geeignete Multiplikation mit $\sqrt{g}$ jeden relativen Tensor in einen absoluten Tensor nach der Formel

$$\overset{(-1)}{T}{}^{i\ldots}{}_{k\ldots} = [(\sqrt{g})]^{-n}\, \overset{(n)}{T}{}^{i\ldots}{}_{k\ldots} \tag{55}$$

verwandeln, also z. B.:

$$\underset{4}{E}{}^{(ik)}{}_{l} = \overset{(-1)}{(\sqrt{g})}\; \overset{(-1)}{\underset{4}{E}}{}^{ik}{}_{l}\,,\quad \overset{(-1)}{\Phi}{}^{i} = (\sqrt{g})^{-1}\, \overset{(-1)}{\Phi}{}^{i}\,.$$

Die Gleichungen (42) und (43) lauten dann:

$$\begin{aligned} \sigma^{(ik)} &= \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\varepsilon_{(ik)}}\,, \quad \mu_{(ik)} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\varkappa^{(ik)}}\,,\\ 2\,\sigma_i &= \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\varphi^i}\,, \quad 2\,\mu^i = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\varkappa_i} \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = {} & \underset{1}{E}{}^{(ik)(lm)}\,\varepsilon_{(ik)}\,\varepsilon_{(lm)} + \underset{2}{E}{}_{(ik)(lm)}\,\varkappa^{(ik)}\,\varkappa^{(lm)} + \\ & + \underset{3}{E}{}^{(ik)}{}_{(lm)}\,\varepsilon_{(ik)}\,\varkappa^{(lm)} + \underset{4}{E}{}^{(ik)}{}_{l}\,\varepsilon_{(ik)}\,\varphi^l + \\ & + \underset{5}{E}{}_{(ik)l}\,\varkappa^{(ik)}\,\varphi^l + \underset{6}{E}{}^{(ik)l}\,\varepsilon_{(ik)}\,\varkappa_l + \underset{7}{E}{}_{(ik)}{}^{l}\,\varkappa^{(ik)}\,\varkappa_l + \\ & + \underset{8}{E}{}_{(ik)}\,\varphi^i\,\varphi^k + \underset{9}{E}{}^{(ik)}\,\varkappa_i\,\varkappa_k + \underset{10}{E}{}_{i\cdot}^{\,k}\,\varphi^i\,\varkappa_k\,. \end{aligned} \tag{57}$$

Als Beispiel geben wir das Stoffgesetz eines elastisch transversalisotropen Materials in kartesischen Koordinaten an:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_1\,\varepsilon_{11} + C_2\,\varepsilon_{22} + C_3\,\varepsilon_{33}\,, & \mu_{11} &= D_1\,\varkappa_{11} + D_2\,\varkappa_{22} + D_3\,\varkappa_{33}\,,\\ \sigma_{22} &= C_2\,\varepsilon_{11} + C_1\,\varepsilon_{22} + C_3\,\varepsilon_{33}\,, & \mu_{22} &= D_2\,\varkappa_{11} + D_1\,\varkappa_{22} + D_3\,\varkappa_{33}\,,\\ \sigma_{33} &= C_3\,\varepsilon_{11} + C_3\,\varepsilon_{22} + C_4\,\varepsilon_{33}\,, & \mu_{33} &= D_3\,\varkappa_{11} + D_3\,\varkappa_{22} + D_4\,\varkappa_{33}\,,\\ \sigma_{(12)} &= \frac{1}{2}\,(C_1 - C_2)\,\varepsilon_{(12)}\,, & \mu_{(12)} &= \frac{1}{2}\,(D_1 - D_2)\,\varkappa_{(12)}\,,\\ \sigma_{(23)} &= C_5\,\varepsilon_{(23)} + C_6\,\varphi_1\,, & \mu_{(23)} &= D_5\,\varkappa_{(23)} + D_6\,\varkappa_1\,,\\ \sigma_{(31)} &= C_5\,\varepsilon_{(31)} - C_6\,\varphi_2\,, & \mu_{(31)} &= D_5\,\varkappa_{(31)} - D_6\,\varkappa_2\,,\\ 2\,\sigma_1 &= C_6\,\varepsilon_{(23)} + C_7\,\varphi_1\,, & 2\,\mu_1 &= D_6\,\varkappa_{(23)} + D_7\,\varkappa_1\,,\\ 2\,\sigma_2 &= -\,C_6\,\varepsilon_{(13)} + C_7\,\varphi_2\,, & 2\,\mu_2 &= -\,D_6\,\varkappa_{(13)} + D_7\,\varkappa_2\,,\\ 2\,\sigma_3 &= C_8\,\varphi_3\,, & 2\,\mu_3 &= D_8\,\varkappa_3\,, \end{aligned} \tag{58}$$

mit den 16 Elastizitätskonstanten $C_1 \ldots D_8$. Dieses Beispiel zeigt, daß bei transversaler Isotropie die Kraftspannungen nur von den Verschiebungs- und Verdrehungsdeformationen abhängen und die Momentenspannungen nur von den Krümmungsdeformationen. Das ist nicht immer so: bei Orthotropie z. B. sind die Tensoren $\underset{3}{\boldsymbol{E}}$, $\underset{5}{\boldsymbol{E}}$, $\underset{6}{\boldsymbol{E}}$ und $\underset{10}{\boldsymbol{E}}$ nicht identisch Null (Tabelle 1, Zeile 4), und die Kraftspannungen sind z. T. auch Funktionen der Krümmungsdeformationen. Das isotrope, zentrosymmetrische Material hat mit nur 6 Stoffkonstanten das einfachste Stoffgesetz. Wir können es in kartesischen Koordinaten aus (58) entnehmen, wenn wir

$$\begin{aligned} &C_4 = C_1,\ C_3 = C_2\,,\ C_5 = \frac{1}{2}(C_1 - C_2),\ C_6 = 0\,,\ C_8 = C_7 \\ &D_4 = D_1,\ D_3 = D_2,\ D_5 = \frac{1}{2}(D_1 - D_2)\,,\ D_6 = 0\,,\ D_8 = D_7 \end{aligned} \tag{59}$$

setzen.

Dieses Stoffgesetz läßt sich auch unmittelbar herleiten. Wir unterscheiden vorübergehend wieder zwischen absoluten und relativen Tensoren und wählen $\mathfrak{A}$ als Funktion der 1. und 2. absoluten bzw. relativen Invarianten der Deformationstensorfelder:

$$\begin{aligned} &g^{ik}\,\varepsilon_{(ik)}\,,\ g^{ik} g^{lm}\,\varepsilon_{(il)}\,\varepsilon_{(km)}\,,\ g_{ik}\,\overset{(+1)}{\varkappa}{}^{ik}\,, \\ &g_{ik}\, g_{lm}\,\overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(il)}\,\overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(km)}\,,\ g_{ik}\,\overset{(+1)}{\varphi}{}^{i}\,\overset{(+1)}{\varphi}{}^{k}\,,\ g^{ik}\,\varkappa_i\,\varkappa_k\,, \\ &\varepsilon_{(ik)}\,\overset{(-1)}{\varkappa}{}^{(ik)}\,,\ \overset{(-1)}{\varphi}{}^{i}\,\varkappa_i\,. \end{aligned} \tag{60}$$

Die homogene Funktion 2. Grades in den Deformationsvariablen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = {} & \underset{1}{A}\, g^{ik} g^{lm}\,\varepsilon_{(ik)}\,\varepsilon_{(lm)} + \underset{2}{\overset{(-2)}{A}}\, g_{ik}\, g_{lm}\,\overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(ik)}\,\overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(lm)} + \\ & + \underset{3}{A}\, g^{ik} g^{lm}\,\varepsilon_{(il)}\,\varepsilon_{(km)} + \underset{4}{\overset{(-2)}{A}}\, g_{ik}\, g_{lm}\,\overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(il)}\,\overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(km)} + \\ & + \underset{5}{\overset{(-2)}{A}}\, g_{ik}\,\overset{(+1)}{\varphi}{}^{i}\,\overset{(+1)}{\varphi}{}^{k} + \underset{6}{A}\, g^{ik}\varkappa_i\,\varkappa_k + \underset{7}{\overset{(-1)}{A}}\, g^{ik}\, g_{lm}\,\varepsilon_{(ik)}\,\overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(lm)} + \\ & + \underset{8}{\overset{(-1)}{A}}\,\varepsilon_{(ik)}\,\overset{(+1)}{\varkappa}{}^{(ik)} + \underset{9}{\overset{(-1)}{A}}\,\varkappa_i\,\overset{(-1)}{\varphi}{}^{i} \end{aligned} \tag{61}$$

enthält zunächst 9 Stoffkonstanten $\underset{i}{\overset{(n)}{A}}$. Wir untersuchen wieder — in einem kartesischen Koordinatensystem — den Einfluß der elastischen Symmetrie auf diese Materialkonstanten. Bei der Transformation $x^{\underline{i}} = -x^i$ $(J = -1)$ dürfen sich die $\overset{(n)}{A_i}$, die sich gemäß

$$\underset{\underline{i}}{\overset{(n)}{A}} = (J)\,\underset{i}{\overset{(n)}{A}} \tag{62}$$

transformieren, nicht ändern. Das führt zu dem Ergebnis:

$$\underset{7}{\overset{(-1)}{A}} = \underset{8}{\overset{(-1)}{A}} = \underset{9}{\overset{(-1)}{A}} = 0\,. \tag{63}$$

Nach dieser Zwischenrechnung beschränken wir uns wieder auf Transformationen mit positiver *Jacobi*scher Determinante und gehen endgültig zu absoluten Tensoren über. Aus (61) und (56) folgt dann das lineare Stoffgesetz des elastisch isotropen, zentrosymmetrischen Materials:

$$\begin{aligned} \sigma^{(ik)} &= 2 \underset{1}{A}\, g^{ik} g^{lm} \varepsilon_{(lm)} + 2 \underset{3}{A}\, g^{il} g^{km} \varepsilon_{(lm)} , \\ \mu_{(ik)} &= 2 \underset{2}{A}\, g_{ik} g_{lm} \varkappa^{(lm)} + 2 \underset{4}{A}\, g_{il} g_{km} \varkappa^{(lm)} , \\ 2\sigma_i &= 2 \underset{5}{A}\, g_{ik} \varphi^k , \\ 2\mu_i &= 2 \underset{6}{A}\, g^{ik} \varkappa_k . \end{aligned} \tag{64}$$

Mit

$$\underset{1}{A} = G \frac{\nu}{1-2\nu} , \qquad \underset{3}{A} = G \tag{65}$$

(G = Gleitmodul, ν = Querkontraktionszahl)

ist $(64)_1$ das *Hooke*sche Gesetz der klassischen Elastizitätstheorie.

Für $\underset{2}{A}, \underset{4}{A}, \underset{5}{A}$ und $\underset{6}{A}$ führen wir ein:

$$\begin{aligned} \underset{2}{A} &= G L^2 c_3 , \quad \underset{4}{A} = G L^2, \\ \underset{5}{A} &= G c_1, \quad \underset{6}{A} = G L^2 c_2 \end{aligned} \tag{66}$$

mit der Materialkonstanten L von der Dimension einer Länge und den drei dimensionslosen Materialkonstanten c_1, c_2 und c_3. Da die elastische Energiedichte positiv definit ist, sind diese Konstanten positiv.

Wir setzen (65) und (66) in (64) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \sigma^{(ik)} &= 2G\left(g^{il} g^{km} + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{ik} g^{lm}\right) \varepsilon_{(lm)} , \\ \mu_{(ik)} &= 2 G L^2 (g_{il} g_{km} + c_3 g_{ik} g_{lm}) \varkappa^{(lm)} , \\ \sigma_i &= G c_1 g_{ik} \varphi^k , \\ \mu^i &= G L^2 c_2 g^{ik} \varkappa_k ; \end{aligned} \tag{67}$$

mit der Umkehrung:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(ik)} &= \frac{1}{2G}\left(g_{il} g_{km} - \frac{\nu}{1+\nu} g_{ik} g_{lm}\right) \sigma^{(lm)} , \\ \varkappa^{(ik)} &= \frac{1}{2GL^2}\left(g^{il} g^{km} - \frac{c_3}{1+3c_3} g^{ik} g^{lm}\right) \mu_{(lm)} , \\ \varphi^i &= \frac{1}{G c_1} g^{il} \sigma_l , \\ \varkappa_i &= \frac{1}{G L^2 c_2} g_{il} \mu^l . \end{aligned} \tag{68}$$

Wegen $\sigma^{[ik]} = e^{ikl}\,\sigma_l$ und $\mu_{[ik]} = e_{ikl}\,\mu^l$ lassen sich die Gleichungen $(67)_1$, $(67)_3$ und $(67)_2$, $(67)_4$ zusammenfassen. Wenn wir dabei die Definitionen der Deformationstensoren berücksichtigen, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma^{ik} &= G\left[\left(1+\frac{c_1}{2}\right)\nabla^i u^k + \left(1-\frac{c_1}{2}\right)\nabla^k u^i + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ik}\nabla_l u^l - c_1\, e^{ikl}\Phi_l\right] \\ \mu^i_{\cdot k} &= G\,L^2\left[(1+c_2)\nabla^i \Phi_k + (1-c_2)\nabla_k \Phi^i + 2\,c_3\,\delta^i_k\,\nabla_l \Phi^l\right]. \end{aligned} \tag{69}$$

Für den ebenen Deformationszustand gilt in kartesischen Koordinaten:

$$u_1 = u_1(x^1, x^2),\; u_2 = u_2(x^1, x^2);\; \Phi_3 = \Phi_3(x^1, x^2);\; u_3 = \Phi_1 = \Phi_2 = 0.$$

Aus (67) folgt dann das Stoffgesetz:

$$\begin{aligned} \sigma_{(ik)} &= 2\,G\left(\varepsilon_{(ik)} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\delta_{ik}\,e\right);\quad e = \varepsilon_{(ll)};\; i, k = 1,2 \\ \sigma_3 &= G\,c_1\,\varphi_3 = G\,c_1\left[\Phi_3 - \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)\right], \\ \mu_{13} &= G\,L^2\,(1+c_2)\,\partial_1\Phi_3, \\ \mu_{23} &= G\,L^2\,(1+c_2)\,\partial_2\Phi_3. \end{aligned} \tag{70}$$

Der ebene Deformationszustand ist nur möglich, wenn die Flächen $z =$ konst. mit den Kraft- und Momentenspannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= G\cdot\frac{2\,\nu}{1-2\,\nu}(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2), \\ \mu_{31} &= G\,L^2\,(1-c_2)\,\partial_1\Phi_3, \\ \mu_{32} &= G\,L^2\,(1-c_2)\,\partial_2\Phi_3 \end{aligned} \tag{70a}$$

belastet werden. Man kommt in diesem Spezialfall also mit 5 elastischen Konstanten aus.

Das Materialgesetz (70) mit den 4 elastischen Konstanten

$$G,\ \nu,\ 2\,R = G\,c_1,\ D = G\,L^2\,(1+c_2) \tag{71}$$

wurde in [5] von *H. Schaefer* eingeführt und an einfachen Beispielen untersucht. Wie dort gezeigt wurde, ist die Elastizitätskonstante L ein Maß für den Starrheitsbereich der kleinsten Elemente des *Cosserat*-Kontinuums. Der Einfluß der neuen Stoffgesetze erstreckt sich auf eine „Grenzschicht", deren Dicke durch L bestimmt ist, wenn der elastische Körper nicht durch Volumenmomente belastet ist und auf seiner Oberfläche die Randbedingungen der erweiterten Theorie erfüllt werden. Im Inneren des elastischen Körpers werden die Resultate der klassischen Elastizitätstheorie kaum abgeändert.

5. Die elastischen Grundgleichungen

Da wir jetzt mit absoluten Tensoren rechnen, lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_i \sigma^{ik} &= - X^k, \\ \nabla_i \mu^i_{.k} - 2\sigma_k &= - Y_k, \end{aligned}\right\} \text{ in } V, \tag{72}$$

und die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} n_k \sigma^{kl} &= p^l \\ n_k \mu^k{}_l &= q_l \end{aligned} \tag{73}$$

auf dem Teil der Oberfläche F, dessen Belastungen vorgegeben sind. Setzen wir in (72) das Stoffgesetz (69) ein, so erhalten wir die elastischen Grundgleichungen des isotropen *Cosserat*-Kontinuums:

$$\begin{gathered} G\left[\left(1+\frac{c_1}{2}\right)\nabla_k\nabla^k u^i + \left(1-\frac{c_1}{2}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\right)\nabla^i\nabla_k u^k + c_1 e^{ikl}\nabla_k \Phi_l\right] = -X^i, \\ G L^2\left[(1+c_2)\nabla_k\nabla^k\Phi_i + (1-c_2+2c_3)\nabla_i\nabla_k\Phi^k\right] - \\ - 2Gc_1\left(\Phi_i - \frac{1}{2}e_{ikl}\nabla^k u^l\right) = -Y_i; \end{gathered} \tag{74}$$

oder symbolisch geschrieben:

$$\begin{gathered} G\left[\left(1+\frac{c_1}{2}\right)\Delta\,\mathfrak{u} + \left(1-\frac{c_1}{2}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{u} + c_1\operatorname{rot}\vec{\Phi}\right] = -\mathfrak{X}, \\ G L^2\left[(1+c_2)\Delta\vec{\Phi} + (1-c_2+2c_3)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Phi}\right] - \\ - 2Gc_1\left(\vec{\Phi} - \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{u}\right) = -\mathfrak{Y}. \end{gathered} \tag{75}$$

Zu diesen 6 gekoppelten partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung treten noch hinzu die Randbedingungen (73) auf dem belasteten Teil und

$$u^i = u^i_0, \quad \Phi^i = \Phi^i_0 \tag{76}$$

auf dem kinematisch festgelegten Teil der Oberfläche F, wie aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen folgt.

Da die elastische Energiedichte positiv definit ist, läßt sich die Eindeutigkeit der Lösungen in einem einfach zusammenhängenden Bereich beweisen wie in der klassischen Elastizitätstheorie.

Aus den elastischen Grundgleichungen (75) folgt, daß die Divergenz des Verschiebungsfeldes $e = \operatorname{div}\mathfrak{u}$ wie in der klassischen Elastizitätstheorie eine Potentialfunktion ist:

$$\Delta e = 0, \tag{77}$$

wenn $\operatorname{div}\mathfrak{X} = 0$ ist.

Die Divergenz des Drehvektorfeldes $f = \operatorname{div}\vec{\Phi}$ genügt dagegen der Differentialgleichung

$$\Delta f - k^2 f = 0, \quad k^2 = \frac{c_1}{L^2(1+c_2)} > 0, \tag{78}$$

wenn $\operatorname{div}\mathfrak{Y} = 0$ ist.

6. Die eingeschränkte *Cosserat*sche Theorie

In dieser Theorie ist die infinitesimale Drehung der orientierten Punkte des Kontinuums nicht mehr beliebig, sondern bereits durch die Rotation des Verschiebungsfeldes festgelegt:

$$\Phi^i = \frac{1}{2} e^{ikl} \nabla_k u_l \, . \tag{79}$$

Dementsprechend sind die Verdrehungsdeformationen

$$\varphi^i \equiv 0 \, , \tag{80}$$

und die diesen Deformationen zugeordneten Spannungen, die Komponenten des antisymmetrischen Kraftspannungstensors, werden zu Reaktionsspannungen.

Mit den Deformationstensoren:

$$\varepsilon_{(ik)} = \nabla_{(i} u_{k)} \tag{81}$$

und

$$\varkappa_{i.}^{\ k} = \frac{1}{2} e^{klm} \nabla_i \nabla_l u_m \tag{82}$$

wobei $\varkappa_{i.}^{\ i} = 0$ ist, erhalten wir aus (64) das lineare Stoffgesetz

$$\begin{aligned} \sigma^{(ik)} &= 2\,G \left(g^{il} g^{km} + \frac{\nu}{1 - 2\,\nu} g^{ik} g^{lm} \right) \varepsilon_{(lm)} \\ \mu_{(ik)} &= 2\,G\,L^2\, g_{il}\, g_{km}\, \varkappa^{(lm)} \, , \\ \mu^i &= G\,L^2\, c_2\, g^{ik} \varkappa_k \, , \end{aligned} \tag{82}$$

mit insgesamt 4 Materialkonstanten.

Die kinematisch eingeschränkte Theorie wurde von *Koiter* in [8] ausführlich dargestellt. Diese Arbeit enthält neben einfachen, erläuternden Beispielen insbesondere eine eingehende Untersuchung über die Formulierung der kinematischen und statischen Randbedingungen.

Literatur

[1] *E.* und *F. Cosserat:* Théorie des corps déformables, A. Hermann et Fils, Paris (1909).
[2] *G. Hamel:* Axiome der Mechanik, Handbuch der Physik, Bd. 5, Berlin 1927.
[3] *J. L. Ericksen* und *C. Truesdell:* Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells, Archive for Rational Mechanics and Analysis I, 4 (1958).
[4] *W. Günther:* Zur Statik und Kinematik des Cosseratkontinuums, Abhdlg. d. Braunschweigischen wissenschaftlichen Gesellschaft, Band X (1958).
[5] *H. Schaefer:* Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat-Kontinuums, Miszellaneen der Angewandten Mechanik (1962), Akademie-Verlag, Berlin.
[6] *R. A. Toupin:* Elastic Materials with Couple-Stresses, Archive for Rational Mechanics and Analysis, XI, 5 (1962).
[7] *R. D. Mindlin* und *H. F. Tiersten:* Effects of Couple-Stresses in Linear Elasticity, Archive for Rational Mechanics and Analysis, XI, 5 (1962).

[8] *W. T. Koiter:* Couple-Stresses in the Theory of Elasticity I und II. Proceedings koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Series B, **67**, 1 (1964).
[9] *E. L. Aero* und *E. V. Kuvshinskii:* Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles, Fizika Tverdogo Tela **2** (1960), übersetzt in: Soviet Physics Solide State, **2** (1961).
[10] *G. Grioli:* Mathematical Theory of elastic equilibrium (Recent results), Ergebnisse der Angewandten Mathematik Springer Verlag, Berlin (1962).
[11] *J. L. Synge* und *A. Schild:* Tensor Calculus, University of Toronto Press, Toronto (1959).
[12] *J. F. Nye:* Physical Properties of Crystals, Oxford University Press (1957).
[13] *McWeeny:* Symmetry, Pergamon Press (1963).
[14] *A. C. Green* und *W. Zerna:* Theoretical Elasticity, Oxford (1954).
[15] *E. Kröner:* Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Ergebnisse der Angewandten Mathematik Springer Verlag, Berlin (1958).